

Teorema 6.4 (**‘Teoremi di Bolzano–Weierstrass’**) (i) Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ con un numero infinito di elementi¹. Allora $\mathcal{D}E \neq \emptyset$.

(ii) Da ogni successione di numeri reali limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente (ossia con limite in $\mathbb{R}$).

(iii) Da ogni successione di numeri reali è possibile estrarre una sottosuccessione regolare (ossia con limite in $\mathbb{R}^*$).

Questi enunciati sono una semplice conseguenza del seguente

Lemma Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ con un numero infinito di elementi. Allora esiste una successione $\{x_k\} \subseteq E$ convergente tale che $x_k \neq x_h$ per ogni $k \neq h$.

Dimostrazione (del Lemma) Poiché E è limitato esistono due numeri $a < b$ tali che $E \subseteq [a, b]$. Sia $I_0 = [a, b] =: [a_0, b_0]$ e dividiamo in due tale intervallo: $I_0 = I \cup I'$ con $I = [a, c]$, $I' = [c, b]$ e $c = (a + b)/2$ il punto di mezzo di I_0 . Poiché $\#E = \infty$, o $\#I \cap E = \infty$ o $\#I' \cap E = \infty$ (se fossero entrambi finiti, la loro unione, che coincide E , sarebbe finita contraddicendo l'ipotesi su E). Se $\#I \cap E = \infty$ poniamo $I_1 := I = [a, c] =: [a_1, b_1]$, se $\#I' \cap E < \infty$ poniamo $I_1 := I' = [c, b] =: [a_1, b_1]$. Chiaramente, in entrambi i casi, $a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$, $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ e $\#I_1 \cap E = \infty$. Ora, iteriamo la stessa costruzione con I_1 al posto di I_0 e così via. In tal modo otteniamo una sequenza di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ tali che, per ogni $k \geq 1$, si ha:

$$(a) \quad a_0 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \leq \dots \leq b_0$$

$$(b) \quad b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

$$(c) \quad \#I_k \cap E = \infty.$$

Quindi, la successione $\{a_k\}$ è monotona crescente e limitata superiormente (da un qualunque b_j), mentre $\{b_k\}$ è monotona decrescente e limitata inferiormente (da un qualunque a_j). Dunque esistono (finiti) i limiti $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \alpha$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \beta$. Da (b) segue che

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k - a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{2^k} = 0,$$

e dunque $\alpha = \beta$. Ora, scegliamo una successione $\{x_k\} \subseteq E$ come segue: x_1 è un qualunque punto di $I_1 \cap E$; x_2 è un qualunque punto di $(I_2 \cap E) \setminus \{x_1\}$, e, iterativamente, per $k \geq 2$, x_k è un qualunque punto di $(I_k \cap E) \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Poiché $x_k \in I_k$ si ha che $a_k \leq x_k \leq b_k$ per ogni k e dal criterio del confronto segue che $\lim x_k = \alpha$. Infine, per costruzione $x_k \neq x_h$ per ogni $h \neq k$. ■

Dimostrazione (del Teorema 6.4) (i) segue direttamente dal Lemma poiché $\alpha \in \mathcal{D}(E)$.

(ii) Sia $\{x_k\}$ una successione limitata di numeri reali e sia $E := \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei suoi valori. Se $\#E < \infty$, allora uno dei suoi valori, diciamo $\bar{x}$ viene assunto un numero infinito di volte da $\{x_k\}$, ossia, se $\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = \bar{x}\}$, allora $\#\mathcal{N} = \infty$. Ordinando³ $\mathcal{N}$ otteniamo che $\mathcal{N} = \{n_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ con $n_j < n_{j+1}$: quindi la sottosuccessione $\{x_{n_j}\}$ è tale che $x_{n_j} = \bar{x}$ per ogni j (ed è quindi banalmente convergente).

Se $\#E = \infty$, la tesi segue immediatamente dal Lemma.

(iii) Sia $\{x_k\}$ una successione di numeri reali. Se $\{x_k\}$ non è limitata, la tesi segue dal Lemma 6.3; se $\{x_k\}$ è limitata, la tesi segue da (ii). ■

¹Per la definizione di insieme finito, infinito e cardinalità di un insieme, si veda §1.4.4

²Si noti che $\#((I_k \cap E) \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}) = \infty$.

³Si usi il principio del minimo.